פתרונות מלאים לבוחן אמצע סמסטר – אביב תשס"ו

אלגברה 1מ' – 104016

שם משפחה: ..... שם פרטי: .....

פקולטה: ..... מספר סטודנט: .....

משך הבוחן: שעה וחצי

- למבחן 3 שאלות.
- יש לענות על כל השאלות.
- יש לנמק היטב כל תשובה. תשובה בלתי מנומקת לא תיחשב.
- אין להשתמש בחומר עזר כלשהו כולל מחשבונים.

בהצלחה!

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
סה"כ	

שאלה מס' 1: (30 נקודות)

בשאלה זו אין קשר בין הסעיפים.

א) מצא את כל שורשי המשוואה: $z^5+243=0$.

ב) יהיו z ו- w מספרים מרוכבים בעלי אותו ערך מוחלט (מודול), וכך ש $z+w\neq 0$.

הוכח שהביטוי $\frac{z-w}{z+w}$ הוא מספר מדומה טהור.

ג) פתור את המשוואה $(\bar{z})^2\cdot z=z+i$ כאשר $|z|=1$.

פתרון שאלה מספר 1:

א.

$$z^5+243=0$$
$$z^5=-243$$
$$z=\sqrt[5]{-243}$$
$$-243=243cis180^\circ$$
$$z=\sqrt[5]{243cis180^\circ}=\sqrt[5]{243}cis\frac{180^\circ+360k}{5}=3cis(36^\circ+72k)\quad,\ k=0,...,4$$

$$z_0=3cis36^\circ\ ;\ z_1=3cis108^\circ\ ;z_2=3cis180^\circ\ ;z_3=3cis252^\circ\ ;z_4=3cis324^\circ$$

ב. נתונה מנה של מספרים מרוכבים לכן נכפול בצמוד של המכנה. נזכור כי:

$$\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$$

לכן:

$$\frac{z-w}{z+w}=\frac{z-w}{z+w}\cdot\frac{\bar{z}+\bar{w}}{\bar{z}+\bar{w}}=\frac{z\bar{z}+z\bar{w}-w\bar{z}-w\bar{w}}{|z+w|^2}=\frac{|z|^2+z\bar{w}-w\bar{z}-|w|^2}{|z+w|^2}=$$

$$\frac{|z|^2-|w|^2+z\bar{w}-w\bar{z}}{|z+w|^2}\underset{|z|=|w|}{=}\frac{z\bar{w}-w\bar{z}}{|z+w|^2}\underset{\substack{z\bar{w}=\bar{z}w\\ z\bar{w}-z\bar{w}=2i\,\mathrm{Im}(z\bar{w})}}{=}\frac{2i\,\mathrm{Im}(z\bar{w})}{|z+w|^2}=\frac{2\,\mathrm{Im}(z\bar{w})}{|z+w|^2}i$$

מאחר ו- $\mathrm{Im}(z\bar{w})$ ממשי וגם $|z+w|^2$ ממשי, הרי ש- $\frac{2\,\mathrm{Im}(z\bar{w})}{|z+w|^2}i$ מדומה טהור.

ג. מהנתון נובע $\bar{z}\cdot\underbrace{\bar{z}\cdot z}_{|z|^2=1}=z+i$ לכן $\bar{z}=z+i$ כלומר $\underbrace{z-\bar{z}}_{2i\,\mathrm{Im}(z)}=-i$ כלומר $2i\,\mathrm{Im}(z)=-i$ וע"י הכפלת

שני האגפים ב- $(-i)$ (או השוואת חלק ממשי וחלק מדומה בשני האגפים) נקבל: $2\,\mathrm{Im}(z)=-1$

כלומר: $\mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2}$. נסמן: $z=a+ib$ אז $b=-\frac{1}{2}$. נתון כי $|z|^2=a^2+b^2=1$ נציב את b ונקבל

$a^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=1$ לכן $a^2=\frac{3}{4}$ כלומר $a=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. קיבלנו שני פתרונות למשוואה המקיימים $|z|=1$

והם: $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ ו- $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.

שאלה מס' 2: (35 נקודות = 25 נק' לסעיף א' + 10 נק' לסעיף ב')

א) נתונה מערכת משוואות עם פרמטר ממשי a :

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1+x_2+(a+2)x_3+ax_4=2 \\ x_1+x_2+(a+2)x_3+a^3x_4=2a+4 \end{cases}$$

מצא את כל הערכים של a עבורם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות ואף פתרון, ורשום את מספר דרגות החופש בכל המקרים בהם למערכת יש אינסוף פתרונות.

ב) יהיו A ו- B שתי מטריצות ריבועיות וממשיות המקיימות: $A\cdot B=0$.
הוכח שאם למערכת $Ax=0$ יש מספר סופי של פתרונות אז למערכת $Bx=0$ יש אינסוף פתרונות.

פתרון שאלה מספר 2:

א. נבנה מטריצת מקדמים מורחבת ונדרג:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a+2 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 & a^3 & 2a+4 \end{array}\right) \underset{\substack{R_2\to R_2-R_1 \\ R_3\to R_3-R_1}}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & a+1 & a^3-1 & 2a+4 \end{array}\right) \underset{R_3\to R_3-R_2}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3-a & 2a+2 \end{array}\right)$$

מאחר ומספר המשוואות קטן ממספר הנעלמים לכל a הרי שלמערכת אין פתרון יחיד.
נחפש אילו מבין הערכים המאפסים איברים מובילים גורמים לסתירה במערכת:

$$a+1=0 \quad\Rightarrow\quad a=-1 \quad\Rightarrow\quad a=-1$$
$$a^3-a=0 \quad\Rightarrow\quad a(a^2-1)=0 \quad\Rightarrow\quad a=0,1,-1$$

סה"כ קיבלנו שי האיברים המובילים מתאפסים עבור שלושה ערכים שונים של a: $0,1,-1$.

נציב ונבדוק אילו מבין הערכים הנ"ל גורמים לסתירה:

$$a=0 \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3-a & 2a+2 \end{array}\right) \underset{a=0}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי עבור $a=0$ למערכת אין פתרון.

$$a=1 \quad\Rightarrow\quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3-a & 2a+2 \end{array}\right) \underset{a=1}{\to} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי עבור $a=1$ למערכת אין פתרון.

$$a=-1 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+1 & a-1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3-a & 2a+2 \end{array}\right) \underset{a=-1}{\rightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

קיבלנו כי עבור $a=-1$ למערכת יש אינסוף פתרונות ומספר דרגות החופש במקרה זה הוא: $4-r(A)=4-2=2$. בנוסף, לכל ערך של a כך ש- $a \neq 0,1$ למערכת יש אינסוף פתרונות ומספר דרגות החופש הוא: $4-r(A)=4-3=1$ (כי אז אף שורה לא מתאפסת ואין סתירה במערכת).

לסיכום:

<u>פתרון יחיד</u>: לא קיים לכל ערך של a.

<u>אינסוף פתרונות</u>: לכל $a \neq 0,1$ ומספר דרגות החופש הוא 1, פרט למקרה בו: $a=-1$ אז יש 2 דרגות חופש.

אין פתרון (סתירה): עבור $a=0,1$.

ב. נתון כי A ו- B ריבועיות מסדר $n \times n$ ומקיימות $AB=0$, כלומר $AB^j=0$ לכל $j=1,2,\ldots,n$, כאשר B^j הן עמודות המטריצה B. במילים אחרות, עמודות המטריצה B פותרות את המערכת ההומוגנית $Ax=0$. אך לפי הנתון למערכת $Ax=0$ יש מספר סופי של פתרונות כלומר למערכת $Ax=0$ רק הפתרון הטריוויאלי (כי למערכת משוואות הומוגנית יש או פתרון יחיד או אינסוף פתרונות כך ש"מספר סופי של פתרונות" פירושו פתרון יחיד). מאחר ועמודות B הן פתרונות של המערכת, הרי שעמודות B שוות כולן ל- 0 כלומר $B=0$. מאחר ו- B היא מטריצת ה- 0 הרי שלכל $v \in R^n$ מתקיים $Bv=0$ כלומר למערכת $Bx=0$ יש אינסוף פתרונות כנדרש.

שאלה מס' 3: (35 נקודות)

יהי $V=\left\{ ax^3+bx^2+cx+d \mid \quad a,b,c,d\in R \right\}$, מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה קטנה או שווה ל- 3.

נגדיר תת-מרחבים U ו- W של V ע"י:

$$U=\left\{ p(x)\in V \mid p(1)=0 \quad \text{ו} \quad p'(0)=p'(1) \right\}$$

$$W=\left\{ ax^3+bx^2+bx+c \mid \quad a,b,c\in R \right\}$$

($p(1)$ הוא המספר הממשי שמתקבל מהפולינום $p(x)$ כאשר מציבים 1 במקום x ו- $p'(0),p'(1)$ הוא המספר הממשי המתקבל מהנגזרת של $p(x)$ כאשר מציבים 1 ו- 0 במקום x בהתאמה).

א) מצא בסיס ל- U.

ב) מצא בסיס ל- W.

ג) מצא בסיס ומימד של $U\cap W$.

ד) האם $V=U+W$? נמק!

ה) מצא תת-מרחב Z של V כך ש $V=U\oplus Z$ ורשום בסיס ל- Z.

פתרון שאלה מספר 3:

א. נמצא בסיס ל- $U=\left\{ p(x)\in V \mid p(1)=0 \quad \text{ו} \quad p'(0)=p'(1) \right\}$:

$$U=\left\{ p(x)\in V \mid p(1)=0 \quad \text{ו} \quad p'(0)=p'(1) \right\}=\left\{ ax^3+bx^2+cx+d \,\middle|\, a+b+c+d=0\ ,\ c=3a+2b+c \right\}$$

נפתור את המערכת ההומוגנית שהתקבלה ונציב את הפתרון שלה באיבר כללי של V לקבלת איבר כללי של U :

$$\begin{cases} a+b+c+d=0 \\ c=3a+2b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c+d=0 \\ a=-\frac{2}{3}b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3}b+b+c+d=0 \\ a=-\frac{2}{3}b \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=-\frac{1}{3}b-d \\ a=-\frac{2}{3}b \end{cases}$$

לכן, איבר כללי במרחב U הוא מהצורה:

$$U=\left\{ -\frac{2}{3}bx^3+bx^2+\left(-\frac{1}{3}b-d\right)x+d \,\middle|\, b,d\in R \right\}$$

נוציא סקלרים לקבלת קבוצה פורשת:

$$-\frac{2}{3}bx^3+bx^2+\left(-\frac{1}{3}b-d\right)x+d=\frac{1}{3}b\left(-2x^3+3x^2-x\right)+d\left(-x+1\right)$$

קיבלנו כי המרחב U נפרש ע"י שני פולינומים: $\left\{-2x^3+3x^2-x\ ,\ -x+1\right\}$. קבוצה זו היא גם בלתי תלויה ליניארית (כי הפולינומים אינם פרופורציונאליים) ולכן מהווים בסיס ל- U, ובנוסף, $\dim U=2$.

ב. המרחב $W=\left\{ax^3+bx^2+bx+c \,\middle|\, a,b,c\in R\right\}$ נתון באמצעות איבר כללי, לכן נוציא סקלרים לקבלת קבוצה פורשת:

$$W=\left\{ax^3+bx^2+bx+c \,\middle|\, a,b,c\in R\right\}$$
$$ax^3+bx^2+bx+c=a\left(x^3\right)+b\left(x^2+x\right)+c\left(1\right)$$

קיבלנו כי הקבוצה: $\left\{x^3\ ,\ x^2+x\ ,\ 1\right\}$ פורשת את W. נבדוק תלות ע"י דרוג המקדמים של הפולינומים:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה מדורגת ללא שורות אפסים ולכן הפולינומים הם בלתי תלויים ליניארית ולכן הקבוצה $\left\{x^3\ ,\ x^2+x\ ,\ 1\right\}$ מהווה בסיס ל- W ובנוסף $\dim W=3$

<u>הערה</u>: מאחר והפולינומים הם ממעלות שונות הרי שהם בלתי תלויים ליניארית (**<u>שימו לב</u>** כי ההפך איננו נכון כלומר אם פולינומים הם בלתי תלויים ליניארית אין פירושו כי הם ממעלות שונות, למשל $\left\{x^3\ ,\ x^3+x\right\}$ הם בלתי תלויים ליניארית כי הם לא פרופורציונאליים אך הם שניהם ממעלה 3).

ג. ניקח איבר כללי של U ונאלץ עליו את התנאי של המרחב W שהוא: "המקדם של x^2 שווה למקדם של x":

לפי סעיף א', איבר כללי של U הוא:

$$U=\left\{-\frac{2}{3}bx^3+bx^2+\left(-\frac{1}{3}b-d\right)x+d \,\middle|\, b,d\in R\right\}$$

כדי שאיבר זה יהיה שייך גם למרחב W נדרוש:

$$b=-\frac{1}{3}b-d \qquad \Leftrightarrow \qquad d=-1\frac{1}{3}b=-\frac{4}{3}b$$

נציב באיבר הכללי של U ונקבל איבר כללי ב- $U\cap W$:

$$U\cap W=\left\{-\frac{2}{3}bx^3+bx^2+\left(-\frac{1}{3}b+\frac{4}{3}b\right)x-\frac{4}{3}b\,\middle|\,b\in R\right\}=U\cap W=\left\{-\frac{1}{3}bx^3+bx^2+bx-\frac{4}{3}b\,\middle|\,b\in R\right\}$$

נוציא את הסקלר לקבלת קבוצה פורשת ל- $U\cap W$:

$$-\frac{1}{3}bx^3+bx^2+bx-\frac{4}{3}b=\frac{1}{3}b\left(-x^3+3x^2+3x-4\right)$$

קיבלנו כי הפולינום $\left\{-x^3+3x^2+3x-4\right\}$ פורש את $U\cap W$. הוא גם בלתי תלוי ליניארית (כי הוא שונה מ- 0) ולכן מהווה בסיס ל- $U\cap W$ ובנוסף $\dim(U\cap W)=1$.

ד. מאחר והמרחב $U+W$ הוא תת מרחב של V, כדי להוכיח ש- $V=U+W$ מספיק להוכיח כי המימד של $U+W$ שווה למימד של V ואז לפי משפט, נקבל ש- $V=U+W$. נעזר בתוצאות של הסעיפים הקודמים ובמשפט המימדים:

$$\dim\left(U+W\right)=\dim U+\dim W-\dim\left(U\cap W\right)=2+3-1=4=\dim V$$

ה. נשלים בסיס של U לבסיס של המרחב V. נרשום במטריצה את המקדמים של איברי הבסיס של U שמצאנו בסעיף א' ונוסיף שתי שורות לקבלת מטריצה מדרגה 4:

הבסיס של U שמצאנו בסעיף א' הוא: $\left\{-2x^3+3x^2-x\ ,\ -x+1\right\}$ נקבל:

$$\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ & & & \\ & & & \end{pmatrix}$$

נוסיף את שתי השורות החסרות לקבלת מטריצה מדרגה 4, למשל:

$$\begin{pmatrix}-2 & 3 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

אומנם המטריצה אינה מדורגת אך ניתן לראות שע"י החלפת השורות 2 ו- 3 נקבל מטריצה מדרגה 4 ללא שורות אפסים לכן 4 שורות אלו יוצרות בסיס למרחב V כלומר $V=U+Z$. לכן, בסיס למרחב Z הוא: $\left\{x^2\ ,\ 1\right\}$.

בנוסף מאחר ו- $\dim U=2$ וכן $\dim Z=2$ נקבל כי:

$$\dim\left(U\cap Z\right)=\dim U+\dim Z-\dim\left(U+Z\right)=2+2-4=0$$

כלומר $V=U\oplus Z$ כנדרש.